

Egyszerű pontok jellemzése a BCC rácson [★]

Kardos Péter

Szegedi Tudományegyetem, Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék
pkardos@inf.u-szeged.hu

Absztrakt. A bináris képfeldolgozás számos alkalmazásában gyakran vizsgált probléma a topológia megőrzésének biztosítása, amelyben az egyszerű pontok fogalma kulcsszerepet játszik. Az e problémával foglalkozó irodalomban elsősorban a konvencionális négyzet- és kockamozaiakon mintavételezett 2D ill. 3D képekre vonatkozóan találhatunk eredményeket. Ebben a cikkben a BCC rácsbeli egyszerű pontok néhány jellemzését adom meg.

1. Bevezető

A 3D digitális képeket leggyakrabban a kockamozaiakon mintavételezik, amelynek voxel reprezentációja az euklideszi tér egységkockákra történő tesszellációján alapszik. Azonban egy ettől eltérő 3D struktúra, a teret csonkolt oktaéderekre particionáló *tércenrált kockarács* (*body-centered cubic grid*, *BCC rács*) is jelentős tudományos érdeklődésnek örvend a képfeldolgozásban és a digitális geometriában a hagyományos kockarácossal szembeni előnyei miatt [2, 10, 14, 15, 17, 18]. Egyrészt a BCC rács sokkal hatékonyabbnak bizonyul a 3D képek mintavételezésében, mert a kitöltési sűrűsége, azaz a voxelbe írható legnagyobb gömb térfogatának és a voxel térfogatának az aránya kisebb, mint a konvencionális mintavételezési séma esetén [14]. Egy másik előnye ennek az alternatív tesszellációnak az egyszerűbb összefüggőségi struktúráján alapszik. A 3D Jordán tétel szerint egy egyszerű zárt felszín a komplementerét két komponensre osztja [11]. A kockarácson, ahol a szomszédos rácsponatok csúcson, élen vagy lapon osztozhatnak, a Jordán tulajdonság diszkrét megfelelője csak akkor teljesíthető, ha különböző összefüggőségi relációkat használunk az előtérhez és a háttérhez is. Viszont a BCC rácson csak lapszomszédokról beszélhetünk, így ez esetben nem keletkezik összefüggőségi paradoxon [14].

A topológia-megőrzés a digitális topológia alapproblémája. A javasolt 3D topologiai algoritmusok leginkább a kockarácson alapulnak, de ezek mellett néhány nem standard rácson működő eljárást is javasoltak [3, 12, 13, 15]. A topológia-megőrzés ellenőrzése az egyszerű pontok fogalmán alapszik: egy objektumpont egyszerű, ha a törlése nem változtatja meg a kép topológiáját [8]. Az

[★] A jelen cikkben bemutatott eredményeket az alábbi műben közöltem:

Kardos, P.: Characterizations of Simple Points on the Body-Centered Cubic Grid. In: Proc. 20th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2020, Lecture Notes in Computer Science 12148, Springer Nature, 62-72 (2020) [4].

egyszerű pontok számos jellemzését javasolták már kockarácson mintavételezett 3D képekre [5, 6, 9], viszont a BCC rácson ugyanezt eddig csak egyetlen közleményben vizsgálták [16]. Ennek a cikknek a célja e hiány pótlása az egyszerű pontok néhány vizuális jellemzésének megadásával az utóbbi rácson.

A cikk további felépítése a következő: A 2. fejezetben áttekintem a 3D digitális topológia BCC rácsra vonatkozó alapfogalmait. A 3. fejezetben megadok néhány olyan pontkonfigurációt, amelyek lehetővé teszik az egyszerűség hatékony vizsgálatát, azonkívül az egyszerű pontoknak bemutatom két könnyen vizualizálható jellemzését, amelyek a Kong nevéhez fűződő csatolt halmaz fogalmán alapulnak [6]. Végül az összefoglalás következik.

2. Fogalmak és jelölések

Ebben a fejezetben áttekintem a digitális topológia alapfogalmait [8].

A BCC rácsot a $\mathbb{Z}^3$ halmaz alábbi részhalmazaként definiáljuk:

$$\mathbb{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x \equiv y \equiv z \pmod{2}\}.$$

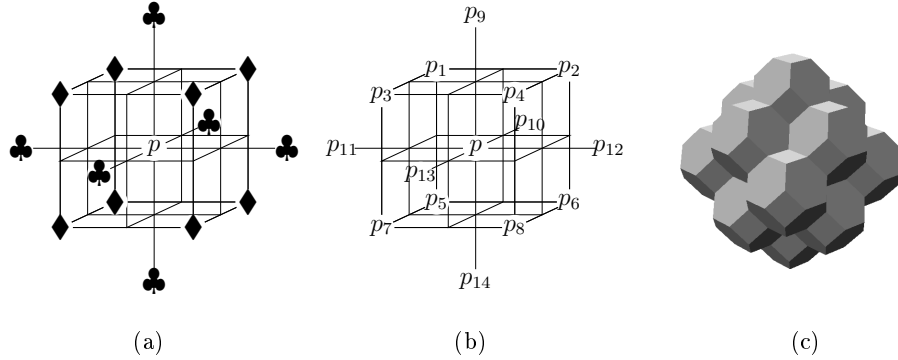
$\mathbb{B}$ elemeit *pontoknak* nevezzük. Egy $p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{B}$ pontnak az alábbi három fajta szomszédságát definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} N_6(p) &= \{q = (q_x, q_y, q_z) \in \mathbb{B} \mid |p_x - q_x| + |p_y - q_y| + |p_z - q_z| = 2\}, \\ N_8(p) &= \{q = (q_x, q_y, q_z) \in \mathbb{B} \mid |p_x - q_x| + |p_y - q_y| + |p_z - q_z| = 3\}, \\ N_{14}(p) &= N_6(p) \cup N_8(p). \end{aligned}$$

Továbbá legyen $N_k^*(p) = N_k(p) \setminus \{p\}$ ($k \in \{6, 8, 14\}$). Az 1a. ábra $N_{14}(p)$ elemeit, az 1b. ábra pedig a pontoknak egy indexelését mutatja. A $\mathbb{B}$ rács mozaikos reprezentációján a rácsponthoz megfelelő elemek csonkolt oktaéderek, amelyeket *voxel*eknek nevezünk (lásd 1c. ábra). A p és $q \in N_{14}^*(p)$ pontok egymással *14-szomszédosak*.

Legyen $X \subset \mathbb{B}$ egy nemüres ponthalmaz. A különböző pontokból álló $X = \langle x_0, x_1, \dots, x_s \rangle$ sorozatot x_0 -ból x_s -be tartó s hosszúságú *14-útnak* nevezzük X -ben, ha x_i 14-szomszédos x_{i-1} -gyel ($i = 1, \dots, s$). Két $p, q \in \mathbb{B}$ pontot *14-összefüggő*nek nevezünk az $X \subseteq \mathbb{B}$ halmazon, ha van X -beli 14-út p -ből q -ba. Az X halmaz *14-összefüggő* az $Y \supseteq X$ ponthalmazon ha bármely két X -beli pont 14-összefüggő Y -on. Az X halmaz egy *14-komponens* az $Y \supseteq X$ ponthalmazon, ha X 14-összefüggő Y -on, de az $X \cup \{y\}$ halmaz nem 14-összefüggő Y -on semelyik $y \in Y \setminus X$ pontra (azaz X egy maximálisan 14-összefüggő ponthalmaz Y -on). Az S halmaz elemeinek számát $|S|$ -el jelöljük.

A digitális képek [8]-ban ismertetett fogalmával összhangban a $(14, 14)$ *bináris digitális képet* egy $\mathcal{P} = (\mathbb{B}, 14, 14, B)$ négyesként definiáljuk. Egy $B \subseteq \mathbb{B}$ halmazbeli pontot *fekete pontnak* nevezünk és az 1 értéket rendeljük hozzá. A $\mathcal{P}$ kép véges, ha véges sok fekete pontot tartalmaz. Egy $\mathbb{B} \setminus B$ -beli pontot *fehér pontnak* nevezünk és a 0 értéket rendeljük hozzá. Mind a fekete, mind a fehér pontoknak a 14-szomszédságot feleltetjük meg. Egy *fekete komponens* vagy *objektum* egy B -beli 14-összefüggő ponthalmaz, míg egy *fehér komponens* egy $\mathbb{B} \setminus B$ -beli



1. ábra: $N_{14}(p)$ elemei a $\mathbb{B}$ rácson (a). Az $N_6(p)$ halmaz p -t és a hat “♣” jelölésű pontot tartalmazza. Az $N_8(p)$ halmazba p és a nyolc “♦” jelölésű pont tartozik. $N_{14}^*(p)$ pontjainak indexelési sémája (b), és ezeknek a pontoknak a voxeles reprezentációja (c).

14-összefüggő ponthalmaz. Feltételezzük, hogy egy kép véges sok fekete pontot tartalmaz. Egy fekete pontot *határpont*nek nevezünk egy képen, ha az legalább egy fehér ponttal 14-szomszédos. Egy p fekete pontot *izolált pont*nek nevezünk a $(\mathbb{B}, k, \bar{k}, B)$ képen, ha az egy egyetlen pontból álló objektumnak felel meg (vagyis $N_{14}^*(p) \cap B = \emptyset$). A véges képeken levő egyetlen végtelen fehér komponens a *hát-tér*, míg a véges fehér komponens neve *üreg*.

Egy *redukció* egy bináris képet úgy alakít át, hogy azon csak bizonyos fekete pontokat változtat fehérre, azaz csak 1-eseket töröl. Egy párhuzamos redukció a feltételeinek megfelelő pontokat egyszerre törli.

Egy 3D redukció *nem őrzi meg a topológiát*, ha egy fekete komponenst több részre vág vagy teljesen töröl, egy fehér komponenst összeolvaszt egy másik fehér komponenssel, egy új fehér komponenst hoz létre, vagy megszüntet/létrehoz egy lyukat.

Egy *egyszerű pont* alatt olyan fekete pontot értünk, amelynek törlése topológia-megőrző redukció [8].

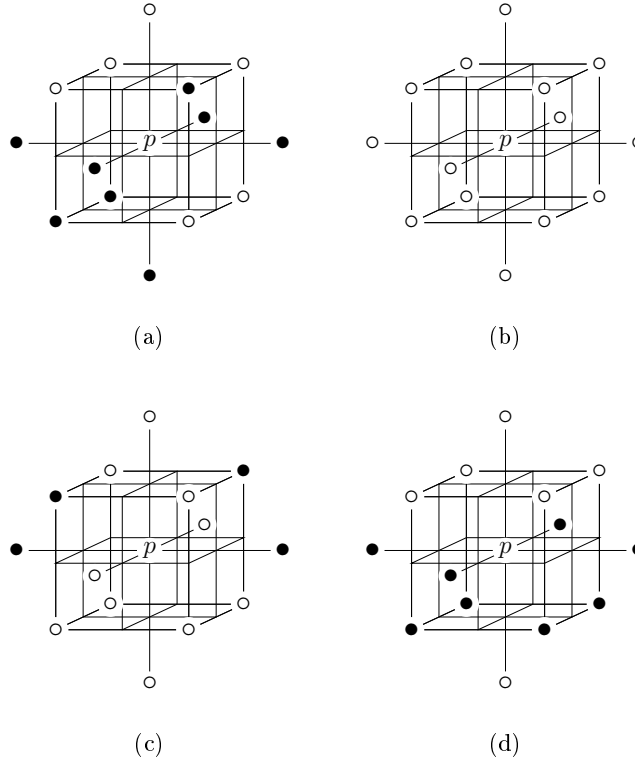
3. Egyszerű pontok jellemzése

A kockamozsaiakon mintavételezett 3D képekre Kong korábban bizonyította, hogy egy pont egyszerűsége egy lokális tulajdonság, amely a pont $3 \times 3 \times 3$ -as környezetének vizsgálatával eldönthető [6]. Később ezt az eredményt adaptálta Strand és Brunner a BCC rácsra:

1. tétel. [16] A $(\mathbb{B}, 14, 14, B)$ képen levő p határpont akkor és csak akkor egyszerű, ha az alábbi két feltétel teljesül:

1. A p pont az $N_{14}^*(p) \cap B$ halmaz egyetlen 14-komponensével 14-szomszédos.
2. A p pont az $N_{14}(p) \setminus B$ halmaz egyetlen 14-komponensével 14-szomszédos.

A 2. ábra néhány példán keresztül illusztrálja az 1. tételt.



2. ábra: Példák egyszerű és nem egyszerű pontokra. A “•” és “○” szimbólumok rendre fekete és fehér pontokat jelölnek. A p fekete pont csak az (a) ábrán egyszerű, ahol az 1. tételnek mindkét feltétele teljesül. A (b) példán p izolált fekete pont, míg a (c) esetben $N_{14}^*(p) \cap B$ halmaznak két 14-komponense van, így mindkét utóbbi esetben sérül az 1. tétel 1. feltétele. A (d) konfiguráció olyan szituációt mutat, amelynél az $N_{14}(p) \setminus B$ halmaznak van két 14-komponense, ezért az 1. tétel 2. feltétele nem teljesül.

Jelen cikkben először bemutatok néhány olyan konfigurációt, ún. *illesztőmintákat*, amelyekkel az 1. tétel feltételeinek ellenőrzése leegyszerűsíthető. Egy fekete pont egyszerű, ha az illesztőminták halmazának legalább egyik konfigurációjára illeszkedik.

Az alap illesztőmintákat (röviden *alpmintákat*) a 3. ábra mutatja. A következő jelöléseket használjuk: A “•” és “○” szimbólumok rendre a fekete ill. fehér pontoknak felelnek meg; a “.”-tal jelölt pozíciókon szerepelhet fekete és fehér pont is. A p -vel jelölt középső pozíció egy fekete pontnak felel meg. Az alpminták számának csökkentése végett további jelöléseket is alkalmazunk. Ha egy konfiguráció b -vel és w -vel jelölt elemeket is tartalmaz, akkor b fekete pontra illeszkedik

vagy w fehér pontra illeszkedik. Az s és t jelölésű pozíciók két különböző színű pontnak felelnek meg.

Jelöljük $\mathcal{T}$ -vel az alapmintákból és azok elforgatott, tükrözött és invertált változataiból álló halmazt. Egy illesztőminta inverziója alatt azt értjük, hogy azon mindegyik pont színét feketéről fehérre ill. fehérrel feketére módosítjuk. A $\mathcal{T}$ -beli illesztőmintákra a következő tétel mondható ki.

2. tétel. [4] *Egy p fekete pont egyszerű egy $(14, 14)$ képen akkor és csak akkor, ha az az illesztőminták $\mathcal{T}$ halmazának valamelyik elemére illeszkedik.*

Kong az egyszerű pontoknak egy másik könnyen vizualizálható jellemzését javasolta a kockarácson, amely az ún. *csatolt halmaz* fogalmán alapszik [6]. A fejezet hátralevő részében ennek a modellnek két lehetséges adaptációját mutatom be a BCC rácstra, amihez Kong cikkének néhány fogalmára támaszkodok a következőkben [6]. Jelölje $U^O(p) = \{f_1, \dots, f_{14}\}$ a p voxel határát, ami a voxel tizennégy lapjának az uniója, ahol p és p_i közös lapja f_i ($i = 1, \dots, 14$) (lásd az 1b. ábrát). Két lap az $U^O(p)$ univerzumban *szomszédos* egymással, ha van közös élük. Az n darab lapból álló $F \subseteq U^O(p)$ halmazt ($1 \leq n \leq 14$) *összefüggőnek* nevezzük, ha az elemeit egy $\langle f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \rangle$ sorozatba rendezhetjük úgy, hogy f_{i_k} és $f_{i_{k+1}}$ szomszédosak egymással bármely $k = 1, \dots, n-1$ -re.

Tegyük fel, hogy p egy objektum voxel a $\mathcal{P} = (\mathbb{B}, 14, 14, B)$ képen. Akkor a p voxel $\mathcal{P}^O$ -*csatolt halmazát* az alábbi módon definiáljuk:

$$\mathcal{A}^O(p) = \{ f_i \mid f_i \in U(p) \text{ és } p_i \in B \}.$$

A fenti halmaz *komplementerét* $\overline{\mathcal{A}(p)}$ a következő módon értelmezzük:

$$\overline{\mathcal{A}^O(p)} = U(p) \setminus \mathcal{A}(p).$$

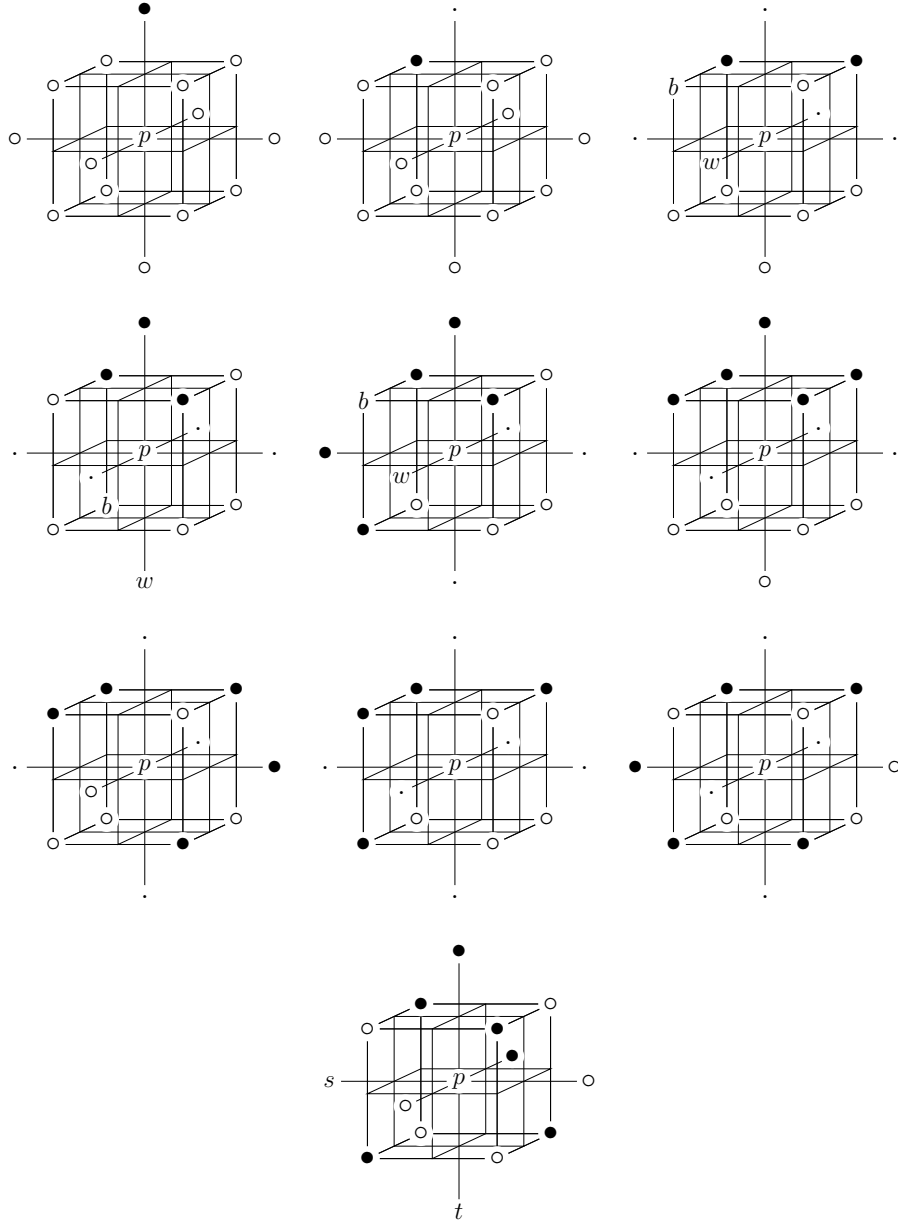
A fenti terminológia használatával az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

3. tétel. [4] *Legyen $\mathcal{P} = (\mathbb{B}, 14, 14, B)$, $p \in B$, és legyen $\mathcal{A}^O(p)$ a p voxel $\mathcal{P}^O$ -csatolt halmaza. A p voxel akkor és csak akkor egyszerű a $\mathcal{P}$ képen, ha $\mathcal{A}^O(p)$ és az $\overline{\mathcal{A}^O(p)}$ komplementere egyaránt nemüres és összefüggő.*

Bár a BCC rácsbeli voxelek nem kocka alakúak, a kockarácshoz hasonlóan a $\mathbb{B}$ rácson is megadható a csatolt halmaznak egy "kocka-alapú" adaptációja. Ebből a célból tekintsünk az euklideszi térben egy $\mathcal{C}$ egység rácskockát, amelynek középpontja egy $\mathbb{B}$ -beli p pont, továbbá a csúcsai, élei és lapjai az alábbi halmazok elemei:

$$\begin{aligned} V &= \{v_i \mid v_i \text{ egybeesik } p_i \text{ vel } N_8^*(p) \text{ ben}\}, \\ E &= \{e_{i,j} \mid e_{i,j} \text{ összeköti a } v_i \text{ és } v_j \text{ csúcsokat a } \mathcal{C} \text{ rácskockában}\}, \\ F &= \{f_i \mid f_i \text{ metszi a } p \text{ és } p_{i+8} \in N_6^*(p) \text{ pontok közötti élt}\}. \end{aligned}$$

Legyen $U^C(p) = V \cup \{e_{i,j} \setminus V \mid e_{i,j} \in E\} \cup \{f_i \setminus E \mid f_i \in F\}$, vagyis ez a halmaz összesen huszonhat elemet tartalmaz a kocka határán: nyolc csúcsot, tizenkét



3. ábra: Az egyszerű pontok jellemzésére szolgáló alapminták (14,14) képeken. Mindegyik alapminta elforgatott, tükrözött és invertált változatai is egyszerű pontokra illeszkednek.

nyitott élt (csúcsok nélkül) és hat nyitott lapot (élek és csúcsok nélkül). Azt mondjuk, hogy az $e_{i,j}$ él (a csúcsaival együtt) az $e_{i,j} \setminus V$ *nyitott él lezártja*, és az f_i lap (éleivel és csúcsaival együtt) az $f_i \setminus E$ *nyitott lap lezártja*. Az $x, y \in U^C(p)$ elemek *szomszédosak*, ha $y \in U^C(p) \setminus V$ (azaz y egy nyitott él vagy nyitott lap), továbbá y lezártja tartalmazza x -et és fordítva.

Egy $S \subseteq U^C(p)$ halmaz *összefüggő*, ha az elemei $\langle s_{i_1}, \dots, s_{i_n} \rangle$ sorozatba rendezhetők úgy, hogy s_{i_k} és $s_{i_{k+1}}$ szomszédosak egymással bármely $k = 1, \dots, n-1$ -re. Be kell még vezetnünk néhány további jelölést abból a célból, hogy $U^C(p)$ néhány speciális részhalmazára hivatkozni tudjunk:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{v_i \mid p_i \in N_8(p) \cap B\}, \\ U_2 &= \{e_{i,j} \mid p_i, p_j \in N_8(p) \cap B\}, \\ U_3 &= \{f_i \setminus E \mid p_{i+8} \in N_6(p) \cap B\}. \end{aligned}$$

Most már definiálni tudjuk a p pont $\mathcal{P}^C$ -*csatolt halmazát* és *komplementerét* is:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^C(p) &= U_1 \cup U_2 \cup U_3, \\ \overline{\mathcal{A}^C(p)} &= U^C(p) \setminus \mathcal{A}^C(p). \end{aligned}$$

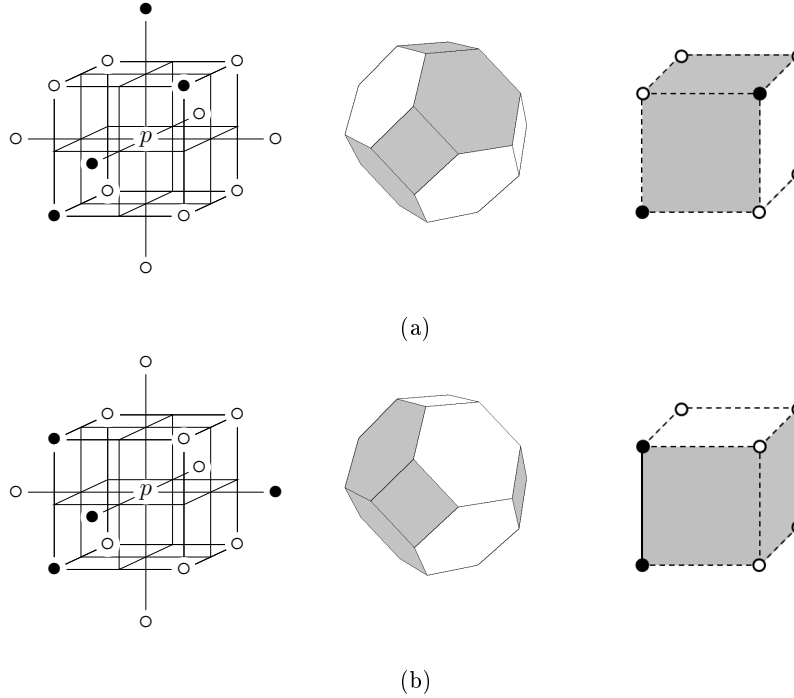
A következő tétel a 3. tételhez hasonló ekvivalenciát fogalmaz meg:

4. tétel. *Legyen $\mathcal{P} = (\mathbb{B}, 14, 14, B)$, $p \in B$, és legyen $\mathcal{A}^C(p)$ a p voxel $\mathcal{P}^C$ -csatolt halmaza. A p voxel akkor és csak akkor egyszerű a $\mathcal{P}$ képen, ha az $\mathcal{A}^C(p)$ halmaz és annak $\overline{\mathcal{A}^C(p)}$ komplementere egyszerre nemüresek és összefüggőek.*

A 4. ábra néhány illusztratív példát mutat a 3. és a 4. tételekre. A csatolt halmazok 3D reprezentációjainak hátránya, hogy azokon nem láthatjuk a voxel mindegyik lapját. E probléma kiküszöbölésére Kong a Schlegel diagramok használatát javasolja, amelyek az n -dimenziós poliéderek speciális $n-1$ dimenziós vetületei, így a voxel határoknak egy síkbeli reprezentációjához jutunk [7]. Az 5. ábrán a 4. ábrabeli csatolt halmazoknak megfeleltetett Schlegel diagramok szerepelnek. Vegyük észre, hogy a voxel egyik lapja nem látható a diagram külső élei által határolt területen: ez a lap a diagram hátterének (azaz a külső élein kívül eső résznek) felel meg.

4. Összefoglalás

Ez a cikk a (14,14) képbeli pontok egyszerűségének néhány új jellemzését tárgyalta. Először az egyszerű pontokat néhány illesztőmintával illusztráltam, majd Kong csatolt halmazának egy “oktaéder-alapú” és egy “kocka-alapú” adaptációját is bemutattam. Fontos megjegyezni, hogy bár az egyszerű pontok fogalma segítséget jelent a képműveletek topológia-megőrző jellegének ellenőrzésében, azonban az egyszerűség önmagában általában nem elegendő a párhuzamos képműveletek topológiai korrektségéhez. Ezért a későbbiekben a BCC rácson értelmezett redukciók topológia-megőrzésének elegendő feltételeit is szeretném kidolgozni.



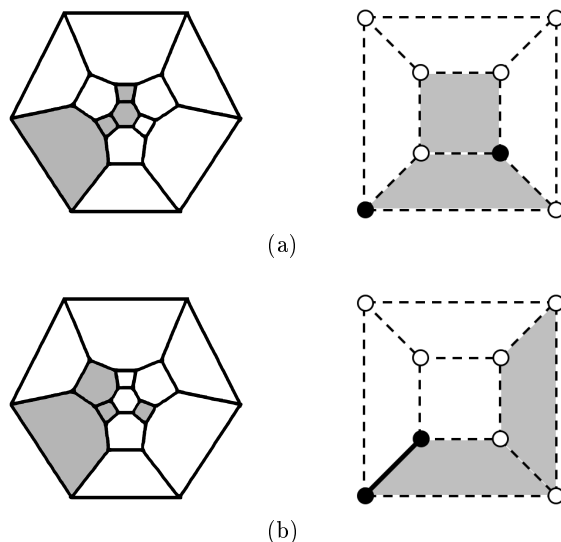
4. ábra: Példák $\mathcal{P}^O(p)$ - és $\mathcal{P}^C(p)$ -csatolt halmazokra. A p pont egyszerű az (a) ábrán, de nem egyszerű a (b) esetben, mert $\mathcal{A}^O(p)$ és $\mathcal{A}^C(p)$ nem összefüggőek. A csonkolt oktaéder szürke lapjai reprezentálják az $\mathcal{A}^O(p)$ halmazbeli elemeket, míg a fehér lapjai az $\overline{\mathcal{A}^O(p)}$ halmazhoz tartoznak. A jobb oldali kocka szürke lapjai, vastag vonalszegmense és fekete csúcsai $\mathcal{A}^C(p)$ halmazbeli elemeknek felelnek meg, míg a fehér lapok, szaggatott vonalszegmensek és fehér csúcsok az $\overline{\mathcal{A}^C(p)}$ halmaz elemei.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002 azonosítószámú, “Integrált kutatói utánpótlás-képzési programok az informatika és számítástudomány diszciplináris területein” című projekt támogatásával jött létre. A projekt az Európai Unió támogatásával és az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Irodalom

1. Chen, L., Rong, Y.: Digital topological method for computing genus and the Betti numbers. *Topology and its Applications*, Vol. 157, 1931-1936 (2010)
2. Čomić, L., Nagy, B.: A combinatorial coordinate system for the body-centered cubic grid. *Graphical Models*, Vol. 87, 11-22 (2016)



5. ábra: A 4. ábrabeli csatolt halmazoknak megfeleltetett Schlegel diagramok. A bal oldali diagramokon a szürke lapok $\mathcal{A}^O(p)$ elemeit jelölik, míg a fehér lapok az $\overline{\mathcal{A}^O(p)}$ halmazhoz tartoznak. A jobb oldali diagramokon a szürke lapok, vastag vonalszegmensek és fekete csúcsok $\mathcal{A}^C(p)$ elemeit mutatják, míg a fehér lapok, szaggatott vonalszegmensek és fehér csúcsok az $\overline{\mathcal{A}^C(p)}$ halmaz elemei.

3. Čomić, L., Magillo, P.: Repairing 3D binary images using the BCC grid with a 4-valued combinatorial coordinate system. *Information Sciences*, Volume 499, 47-61 (2009)
4. Kardos, P.: Characterizations of Simple Points on the Body-Centered Cubic Grid. In: *Proc. 20th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIA 2020*, Lecture Notes in Computer Science 12148, Springer Nature, 62-72 (2020)
5. Klette, G.: Simple Points in 2D and 3D Binary Images. In: Petkov N., Westenberg M.A. (eds) *Computer Analysis of Images and Patterns. CAIP 2003*. LNCS, vol. 2756. Springer, Berlin, Heidelberg (2003)
6. Kong, T.Y.: On topology preservation in 2-d and 3-d thinning. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9, 813-844 (1995)
7. Kong, T.Y.: Topology-preserving deletion of 1's from 2-, 3- and 4-dimensional binary images. In: Ahronovitz E., Fiorio C. (eds) *Discrete Geometry for Computer Imagery. DGCI 1997*. LNCS, vol. 1347. Springer, Berlin, Heidelberg (1997)
8. Kong, T.Y., Rosenfeld, A.: Digital topology: Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48, 357-393 (1989)
9. Malandain, G., Bertrand, G.: Fast characterization of 3D simple points, In: *Proc. 11th IEEE Internat. Conf. on Pattern Recognition, ICPR'92*, pp. 232-235 (1992)
10. Matej, S., Lewitt, R. M.: Efficient 3D grids for image reconstruction using spherically-symmetric volume elements. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 42, no. 4, pp. 1361-1370 (1995)
11. Morgenthaler, D. G., Rosenfeld, A.: Surfaces in three-dimensional digital images. *Information and Control*, Vol. 51, Issue 3, 227-247 (1981)

12. Stelldinger, P., Köthe, U.: Connectivity preserving digitization of blurred binary images in 2D and 3D. *Computers & Graphics*, Volume 30, Issue 1, 70-76 (2006)
13. Stelldinger, P., Strand, R.: Topology Preserving Digitization with FCC and BCC Grids. In: Reulke R., Eckardt U., Flach B., Knauer U., Polthier K. (eds) *Combinatorial Image Analysis. IWCIA 2006*. LNCS, vol. 4040. Springer, Berlin, Heidelberg (2006)
14. Strand, R.: The face-centered cubic grid and the body-centered cubic grid - a literature survey. Internrapport, Centrum für Bildanalys, Uppsala University, Centre for Image Analysis (2005)
15. Strand, R.: Surface skeletons in grids with non-cubic voxels. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition, 2004. ICPR 2004.*, Cambridge, pp. 548-551 Vol. 1 (2004)
16. Strand, R., Brunner, D.: Simple Points on the Body-Centered Cubic Grid. Technical Report 42, Centre for Image Analysis, Uppsala University, Uppsala, Sweden (2006)
17. Strand, R., Nagy, B.: Weighted neighborhood Sequences in Non-Standard Three-Dimensional Grids - Metricity and Algorithms. In: Coeurjolly D., Sivignon I., Tougne L., Dupont F. (eds) *Discrete Geometry for Computer Imagery. DGC I 2008*. LNCS, vol 4992, pp. 201-212, Springer, Heidelberg (2008).
18. Theussl, T., Moller, T., Groller, M. E.: Optimal regular volume sampling. *Proceedings Visualization '01*, 91-546 (2001)